Lycée cantonal
Porrentruy

Maturité académique 2007
OS : Chimie/Biologie

MATHÉMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures

Note maximale (6) pour 5 problèmes justes

Fascicule “Extrait des tables numériques” et machine à calculer non programmable autorisés

---

Problème 1

Etudier, puis représenter (unité 1 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{6}{t^2 - 4t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t^2+1}{t}.$$

Problème 2

On donne les quatre points $A(-6;1;2)$, $B(-3;5;5)$, $C(-2;-2;1)$ et $D(8;-1;1)$ ainsi que la droite $a : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 + 2t. \\ z = 4 - t \end{cases}$ On note π le plan (ABC), $\mathcal{K}$ le cylindre d'axe a et de rayon 3, et enfin α désigne le plan d'équation : $-x + 2y + 2z + 8 = 0$.

1. Écrire l'équation cartésienne du plan π.
2. Montrer que le point D appartient au cylindre $\mathcal{K}$.
3. Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente intérieurement au cylindre $\mathcal{K}$ en un cercle passant par le point D.
4. Montrer que le plan α contient le point D et est tangent au cylindre $\mathcal{K}$.
5. Soit g la génératrice du cylindre $\mathcal{K}$ passant par D. Calculer les coordonnées du point I, intersection de g et du plan π.
6. Écrire une représentation paramétrique de la droite t contenue dans le plan π et tangente au cylindre $\mathcal{K}$ au point I.

Problème 3

a) Soit la fonction complexe $f(z) = i \cdot z^2 + 2$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $f(z)$ est réel.
3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres complexes z de la forme $z = yi$ avec y réel. Déterminer puis représenter graphiquement l'image $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ par l'application f.

b) Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par sa matrice dans la base canonique

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble des points fixes de h.
2. Soit $\mathcal{R}$ le rectangle de sommets $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(3;4)$ et $C(0;4)$.
   Calculer l'image $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ par h puis représenter graphiquement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
3. Calculer la matrice de l'application linéaire qui transforme $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{R}$.
4. Déterminer la matrice de l'application $s \circ h$, où s est la symétrie orthogonale d'axe Ox.

Tournez svp !

Problème 4
Un jeu consiste à retourner des disques. Initialement 4 disques sont posés sur une table, et sur la face cachée de chacun figure une instruction. Il y a 2 fois l'instruction M, une fois l'instruction F, et une fois l'instruction S. Le participant retourne les disques l'un après l'autre, au hasard, et le jeu s'arrête quand l'instruction S apparaît. Pour avoir le droit de jouer, le participant paie une mise de 20 francs, qui constitue son capital initial. Á l'apparition d'une instruction M, le capital est diminué de 10 francs, à l'apparition de l'instruction F, le capital est multiplié par 2, et lorsque l'instruction S apparaît, le jeu s'arrête et le participant touche le capital atteint.
Exemple : avec la suite d'instructions FMS, le capital atteint vaut $(20 \times 2) - 10 = 30$ francs.

a) Une personne joue une fois à ce jeu. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : le jeu s'arrête après avoir retourné les 4 disques
   - B : le jeu s'arrête sans que l'instruction F apparaisse
   - C : le capital atteint vaut 20 francs
   - D : le capital atteint vaut 10 francs, sachant que 2 disques exactement ont été retournés.

b) Un groupe de 48 personnes (20 hommes et 28 femmes) jouent une fois à ce jeu.
   1) Calculer la probabilité des événements suivants :
      - E : exactement 7 personnes ont retourné tous les disques (c'est-à-dire jusqu'à l'arrêt du jeu)
      - F : exactement 3 hommes et 4 femmes ont retourné tous les disques
   2) Calculer une approximation de la probabilité que le nombre de personnes ayant retourné tous les disques soit compris entre 14 et 37 (bornes comprises).

c) Ce jeu est-il équitable ? (Tenir compte de la mise !)

Problème 5
L'uranium ^{234}U se désintègre en thorium ^{230}Th qui, lui-même, se désintègre à son tour. Appelons $y(t)$ la masse de thorium au temps t. Pour 14 unités de masse d'uranium au temps $t = 0$, l'expérience montre que la fonction $y(t)$ satisfait l'équation différentielle :

$$y'(t) + 3y(t) = 14 \cdot e^{-t}$$

où le temps t est exprimé dans des unités convenables sans importance pour la suite.

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus.
2. On considère la condition initiale suivante : $y(0) = 0$. Démontrer que la solution particulière correspondante est $y(t) = 7(e^{-t} - e^{-3t})$ puis déterminer l'instant t où la masse de thorium est maximale. Esquisser le graphe de $y(t)$ pour $t \geq 0$ (unité 1 cm).
3. Soit $\mathcal{D}$ le domaine (non borné) délimité par l'axe Ox et la courbe $\mathcal{C}$: $y = 7(e^{-x} - e^{-3x})$ pour $0 \leq x < \infty$. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.