Lycée cantonal
Porrentruy

Examen de Maturité 2006
OS Physique - Applications des Mathématiques

MATHÉMATIQUES

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 5 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

Étudier puis représenter graphiquement (unité : 3 carrés) la courbe d'équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{e^t}{2t^2 - 3t} \qquad\qquad y(t) = \frac{e^t}{t}$$

Déterminer également l'angle que la courbe forme avec l'axe des x.

Problème 2

On donne les quatre points $A(1;6;1)$, $B(7;-4;2)$, $C(4;8;5)$, $D(2;2;9)$, et on note π le plan (ABC), σ la sphère de centre D et passant par le point A, et γ le cercle d'intersection de la sphère σ et du plan π.

1. Écrire l'équation cartésienne du plan π.
2. Parmi les points de la droite (BC), déterminer celui qui est le plus proche du point D.
3. Écrire l'équation cartésienne de la sphère σ.
4. Déterminer le centre K et le rayon r du cercle γ.
5. Écrire une représentation paramétrique de la droite d comprise dans le plan π et tangente en A à la sphère σ.
6. Déterminer le sommet S du plus grand cône droit inscrit dans la sphère σ et ayant pour base le cercle γ.

Problème 3

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne la fonction g telle que $g(z) = iz + 8$ et l'ensemble E des nombres complexes z tel que le module de $z - 7i$ vaut 5. En d'autres termes :
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 7i| = 5\}$$
   (a) Calculer le point fixe de la fonction g.
   (b) Représenter graphiquement l'ensemble des nombres $z = x + yi$ de l'ensemble E.
   (c) Interpréter géométriquement la fonction g, puis dessiner l'image F de E par la fonction g $(F = g(E))$.

2. Soit D le demi-disque de centre $\Omega(0;7)$, de rayon 5 et situé au-dessus de son diamètre horizontal. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de ce demi-disque D autour de l'axe Ox.

3. Soit l'équation différentielle $yy' - 7y' + x = 0$.

   Déterminer la solution générale de cette équation, puis écrire une condition initiale donnant une solution particulière coïncidant avec l'ensemble E du point 1.

(suite au verso)

Problème 4

1. On considère $\mathbb{R}^3$ et sa base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit l'application linéaire h telle que

$$h(e_1) = 3e_1 - 3e_2 \ , \quad h(e_2) = 2e_1 - 6e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad h(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3$$

   (a) Écrire la matrice H de l'application h.

   (b) Déterminer l'aire de l'image du triangle ABC de sommets $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$ et $C(0;0;2)$ par l'application h.

   (c) Écrire la matrice G de l'application $g = h \circ h$.

2. On considère la famille d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

   (b) Trouver la valeur de a pour laquelle la matrice M_a n'est pas diagonalisable. Justifier !

   (c) Interpréter géométriquement l'endomorphisme M_a pour $a = 1$.

Problème 5

A l'occasion du Mondial de football, une entreprise produit des œufs en chocolat avec une figurine de footballeur cachée à l'intérieur.

Un *lot* est constitué de 12 figurines différentes, réparties en 4 équipes qui se distinguent par la couleur du maillot (rouge, jaune, vert, bleu). Chaque équipe est formée de 3 joueurs : un gardien, un défenseur et un attaquant.

1. Un magasin vient de recevoir un lot et met en vente les 12 œufs.

   (a) Vous décidez d'acheter 3 de ces œufs. Calculer la probabilité des événements suivants :

   A : obtenir l'équipe rouge.

   B : obtenir 1 gardien, 1 défenseur et 1 attaquant.

   C : obtenir 3 joueurs de couleurs différentes, sachant qu'un seul œuf acheté contient un joueur vert.

   D : obtenir exactement 2 joueurs bleus et 1 gardien.

   (b) Soit p_n la probabilité d'obtenir l'équipe jaune en achetant n œufs ($3 \leqslant n \leqslant 12$).

      i. Déterminer la formule générale qui donne la probabilité p_n en fonction de n.

      ii. Montrer que la suite (p_n) est croissante.

2. Cent collectionneurs achètent 5 œufs provenant de lots complets.

   (a) Montrer que, pour chaque collectionneur, la probabilité d'obtenir une équipe est $\frac{2}{11}$.

   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement 15 collectionneurs obtiennent une équipe ?

   (c) La loi normale permet-elle d'estimer la probabilité que le nombre de collectionneurs obtenant une équipe soit compris entre 10 et 20 (bornes comprises) ? Justifier !

   Si oui, calculer cette approximation.