

## MATHÉMATIQUES

- 
- temps à disposition : 4 heures
  - note maximale (6) pour 5 problèmes justes
  - extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
  - machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée
- 

### Problème 1

Étudier puis représenter graphiquement (unité : 4 carrés) la courbe d'équations paramétriques :

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1} \quad y(t) = \frac{t}{t^2-1}$$

### Problème 2

On donne les quatre points  $A(1; 6; 1)$ ,  $B(7; -4; 2)$ ,  $C(4; 8; 5)$ ,  $D(2; 2; 9)$ , et on note  $\pi$  le plan  $(ABC)$ ,  $\sigma$  la sphère de centre  $D$  et passant par le point  $A$ , et  $\gamma$  le cercle d'intersection de la sphère  $\sigma$  et du plan  $\pi$ .

1. Écrire l'équation cartésienne du plan  $\pi$ .
2. Parmi les points de la droite  $(BC)$ , déterminer celui qui est le plus proche du point  $D$ .
3. Écrire l'équation cartésienne de la sphère  $\sigma$ .
4. Déterminer le centre  $K$  et le rayon  $r$  du cercle  $\gamma$ .
5. Écrire une représentation paramétrique de la droite  $d$  comprise dans le plan  $\pi$  et tangente en  $A$  à la sphère  $\sigma$ .
6. Déterminer le sommet  $S$  du plus grand cône droit inscrit dans la sphère  $\sigma$  et ayant pour base le cercle  $\gamma$ .

### Problème 3

1. Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y - \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

- (a) Déterminer la solution générale de cette équation.
  - (b) Déterminer la solution particulière telle que  $y(1) = 3$ .
2. Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on donne la fonction  $g$  telle que  $g(z) = iz + 8$  et l'ensemble  $E$  des nombres complexes  $z$  tel que le module de  $z - 7i$  vaut 5. En d'autres termes :

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 7i| = 5\}$$

- (a) Calculer le point fixe de la fonction  $g$ .
- (b) Représenter graphiquement l'ensemble des nombres  $z = x + yi$  de l'ensemble  $E$ .
- (c) Interpréter géométriquement la fonction  $g$ , puis dessiner l'image  $F$  de  $E$  par la fonction  $g$  ( $F = g(E)$ ).

(suite au verso)

#### Problème 4

1. On considère  $\mathbb{R}^2$  et sa base canonique  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ . Soit l'application linéaire  $h$  telle que

$$h(e_1) = 3e_1 - 3e_2 \quad \text{et} \quad h(e_2) = 4e_1 - 5e_2$$

- Écrire la matrice  $H$  de l'application  $h$ .
- Calculer  $H^{-1}$  et  $H^2$ .
- Calculer le point qui a pour image  $(3; 2)$  par l'application  $h$ .
- Déterminer l'aire de l'image du triangle  $ABC$  de sommets  $A(0;0)$ ,  $B(1;0)$  et  $C(0;1)$  par l'application  $h$ .

2. On considère la famille d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$$

- Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.
- Trouver la valeur de  $a$  pour laquelle la matrice  $M_a$  n'est pas diagonalisable. Justifier !
- Interpréter géométriquement l'endomorphisme  $M_a$  pour  $a = 1$ .

#### Problème 5

A l'occasion du Mondial de football, une entreprise produit des œufs en chocolat avec une figurine de footballeur cachée à l'intérieur.

Un *lot* est constitué de 12 figurines différentes, réparties en 4 équipes qui se distinguent par la couleur du maillot (rouge, jaune, vert, bleu). Chaque équipe est formée de 3 joueurs : un gardien, un défenseur et un attaquant.

1. Un magasin vient de recevoir un lot et met en vente les 12 œufs.

(a) Vous décidez d'acheter 3 de ces œufs. Calculer la probabilité des événements suivants :

$A$  : obtenir l'équipe rouge.

$B$  : obtenir 1 gardien, 1 défenseur et 1 attaquant.

$C$  : obtenir 3 joueurs de couleurs différentes, sachant qu'un seul œuf acheté contient un joueur vert.

$D$  : obtenir exactement 2 joueurs bleus et 1 gardien.

(b) Soit  $p_n$  la probabilité d'obtenir l'équipe jaune en achetant  $n$  œufs ( $3 \leq n \leq 12$ ).

- Déterminer la formule générale qui donne la probabilité  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- Montrer que la suite  $(p_n)$  est croissante.

2. Cent collectionneurs achètent 5 œufs provenant de lots complets.

(a) Montrer que, pour chaque collectionneur, la probabilité d'obtenir une équipe est  $\frac{2}{11}$ .

(b) Quelle est la probabilité qu'exactly 15 collectionneurs obtiennent une équipe ?

(c) La loi normale permet-elle d'estimer la probabilité que le nombre de collectionneurs obtenant une équipe soit compris entre 10 et 20 (bornes comprises) ? Justifier !

Si oui, calculer cette approximation.